

Trigonométrie

DÉFINITION :

Si ABC est un triangle rectangle en C, on définit :

- le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$, noté $\cos(\widehat{BAC})$, le quotient :

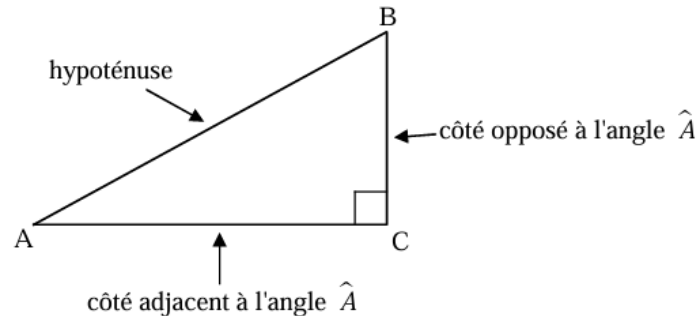
$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{BAC}}{\text{hypoténuse}};$$

- le sinus de l'angle $\widehat{BAC}$, noté $\sin(\widehat{BAC})$, le quotient :

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{hypoténuse}};$$

- la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$, noté $\tan(\widehat{BAC})$, le quotient :

$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{BAC}};$$



Exemples :

- ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 5 \text{ cm}$ et $\widehat{BAC} = 33^\circ$.

Calculer $\widehat{BCA}$, BC et AC (on arrondira les longueurs au dixième).

$$90 - 33 = 57 \text{ donc } \widehat{BCA} = 57^\circ.$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC} \quad (\text{car } [AB] \text{ est le côté adjacent à l'angle } \widehat{BAC}).$$

$$\cos(33) = \frac{5}{AC}$$

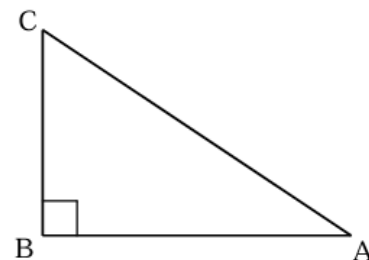
$$AC \times \cos(33) = 5$$

$$AC = \frac{5}{\cos(33)} \approx 6. \text{ [AC] mesure environ 6 cm.}$$

$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB} \quad (\text{car } [BC] \text{ est le côté opposé à l'angle } \widehat{BAC} \text{ et } [AB] \text{ est le côté adjacent à l'angle } \widehat{BAC}).$$

$$\tan(33) = \frac{BC}{5}$$

$$BC = 5 \times \tan(33) \approx 3,2. \text{ [BC] mesure environ 3,2 cm.}$$



- ABC est un triangle rectangle en C tel que $AB = 7 \text{ cm}$ et $BC = 4 \text{ cm}$. Calculer la mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$.

Dans le triangle ABC rectangle en C :

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB}$$

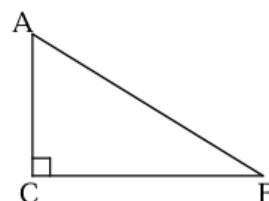
$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{4}{7}$$

$$\text{mes}(\widehat{BAC}) = \sin^{-1}(4 : 7) \approx 35^\circ$$

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{4}{7}$$

$$\text{mes}(\widehat{ABC}) = \cos^{-1}(4 : 7) \approx 55^\circ$$



PROPRIÉTÉ :

Si x désigne la mesure d'un angle aigu, on a les relations suivantes :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

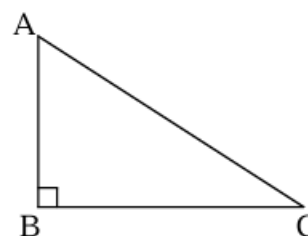


Démonstration :

On se place dans un triangle ABC rectangle en B. Appelons x la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BCA}$:

$$\sin x = \frac{AB}{AC}, \cos x = \frac{BC}{AC} \text{ et } \tan x = \frac{AB}{BC}.$$

$$\begin{aligned} (\sin x)^2 + (\cos x)^2 &= \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 \\ &= \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} \\ &= \frac{AC^2}{AC^2} \quad \text{car } AB^2 + BC^2 = AC^2 \text{ d'après} \\ &= 1 \quad \text{le théorème de Pythagore} \end{aligned}$$



$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC} = \tan x.$$