

Les nombres

DÉFINITION :

- un **nombre entier** est un nombre qui peut s'écrire sans virgule :
13 ; -9 ; 0 ; ...
- un **nombre décimal** est un nombre dont l'écriture décimale a un nombre fini de chiffres après la virgule : 1,715 ; -15,03 ; ...
- un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers : $\frac{4}{3}$; $-\frac{5}{2}$; ...
- un **nombre irrationnel** est un nombre non rationnel : $\sqrt{2}$; π



Un **nombre entier** est un nombre qui n'a pas de partie fractionnaire ou décimale. En d'autres termes, c'est un nombre qui peut être écrit sans virgule ni fraction. Les nombres entiers peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Voici quelques exemples de nombres entiers :

- ...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...

Les nombres comme 2,5 ; 0,75 ou $\frac{3}{4}$ ne sont pas des nombres entiers car ils ont des parties fractionnaires.

Un **nombre décimal** est un nombre qui peut être écrit sous la forme d'une fraction décimale, c'est-à-dire comme le rapport entre un entier (numérateur) et une puissance de 10 (dénominateur). Les nombres décimaux sont souvent représentés avec une virgule pour séparer la partie entière de la partie fractionnaire.

Voici quelques exemples de nombres décimaux :

- $3,14 = \frac{314}{100}$
- $0,75 = \frac{75}{100}$
- $2,5 = \frac{25}{10}$

Un nombre décimal comprend une partie entière et une partie fractionnaire, et peut être positif, négatif ou nul.

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut être exprimé sous la forme d'une fraction où le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers et le dénominateur est différent de zéro. Autrement dit, un nombre rationnel est un nombre qui peut être écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers et b est différent de zéro.

Les nombres rationnels incluent à la fois les fractions, les nombres entiers et les nombres décimaux qui peuvent être écrits sous forme de fractions.

Un **nombre irrationnel** est un nombre qui ne peut pas être exprimé sous forme de fraction, c'est-à-dire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers et b est différent de zéro. Les nombres irrationnels ont une représentation décimale qui est infinie et non périodique. Voici quelques exemples de nombres irrationnels :

- π , qui est environ égal à 3.14159...
- $\sqrt{2}$ (la racine carrée de 2), qui est environ égal à 1.41421...

Les nombres irrationnels sont très importants en mathématiques et apparaissent dans de nombreux contextes, comme en géométrie, en analyse et en théorie des nombres.

Exemples :

$\sqrt{9}$ est un nombre entier car $\sqrt{9} = 3$

$\frac{1}{4}$ est un nombre décimal car $\frac{1}{4} = 0.25$

12,3 est un nombre rationnel car $12,3 = \frac{123}{10}$

Diviseur commun à deux entiers

DÉFINITION

Si a et b sont deux entiers, un **diviseur commun** à a et b est un nombre qui divise a et qui divise b .



Exemple :

4 est un diviseur commun à 24 et 32 car $24 = 4 \times 6$ et $32 = 4 \times 8$

PROPRIÉTÉ :

Parmi les diviseurs communs à a et b ,
l'un d'eux est plus grand que les autres.
On l'appelle le **Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)**.
Le PGCD de a et b est parfois noté $\text{PGCD}(a ; b)$.



Exemple :

Les diviseurs de 24 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24

Les diviseurs de 32 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32

$\text{PGCD}(24 ; 32) = 8$

PROPRIÉTÉ :

Si a et b sont deux entiers tels que $\text{PGCD}(a ; b) = 1$
on dit que a et b sont **premiers entre eux**.



Exemple :

Les diviseurs de 10 sont : 1 ; 2 ; 5 ; 10

Les diviseurs de 21 sont : 1 ; 3 ; 7 ; 21

$\text{PGCD}(10 ; 21) = 1$ donc 10 et 21 sont premiers entre eux

Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide est une méthode pratique pour calculer le PGCD

Exemple :

Recherche du PGCD de 1050 et 165

a	b	reste de la division euclidienne de a par b
1050	165	60
165	60	45
60	45	15
45	15	0

$1050 = 6 \times 165 + 60$
 donc $PGCD(1050; 165) = PGCD(165; 60)$
 $165 = 2 \times 60 + 45$
 donc $PGCD(165; 60) = PGCD(60; 45)$
 $60 = 1 \times 45 + 15$
 donc $PGCD(60; 45) = PGCD(45; 15)$
 $45 = 3 \times 15 + 0$ donc $PGCD(45; 15) = 15$
 donc $PGCD(1050; 165) = 15$

Le dernier reste différent de zéro dans la suite de divisions euclidiennes est 15
 donc $PGCD(1050 ; 165) = 15$

Réduction de fractions

DÉFINITION

Une fraction $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ est dite **irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux



PROPRIÉTÉ :

Pour rendre une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible,
Il suffit de diviser a et b par $PGCD(a ; b)$



Exemple :

$$\frac{1050}{165} = \frac{1050:15}{165:15} = \frac{70}{11} \quad (\text{on a divisé } 1050 \text{ et } 165 \text{ par } PGCD(1050;165)).$$